ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS PARA A CONSTRUÇÃO CIVIL

Newton
Quem se prepara, não para.

Métodos Numéricos em Engenharia: Noções Básicas do Método dos Elementos Finitos

Humberto Monteiro
humbertomonteiro@gmail.com

Noções do Método dos Elementos Finitos: Aula 01

Humberto Monteiro
humbertomonteiro@gmail.com

Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas – Newton

20/07/2019

Na aula de hoje...

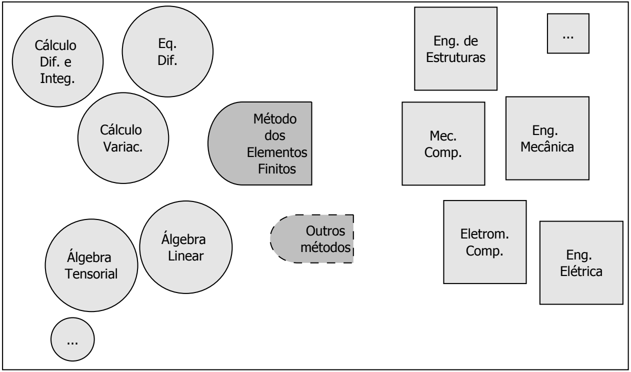
1. Abertura
2. Introdução
   - Visão geral
   - Contextualização histórica
3. Preliminares
   - Conceitos
   - Simulação numérica
   - Etapas do MEF
   - Álgebra linear: conceitos básicos e notações
4. O MEF!
   - Introdução ao Método da Rigidez Direta

Apresentação

- Qual a trajetória de cada um até aqui?
- Quais as expectativas?
- O que vocês acham que é o MEF?

Atenção: Importante que vocês tenham a real noção do que é o MEF, de modo que expectativa e realidade estejam em consonância...

Situando o MEF...



Conceitualmente, MEF está mais proximo do universo da matemática aplicada e da mecânica computacional, do que das disciplinas de engenharia de estruturas e outras.

Orientações

- Dedicação será fundamental (dentro das contingências individuais, obviamente).
- Conceitualmente, o MEF está mais próximo da matemática aplicada que da engenharia de estruturas. Então precisaremos enfrentar uma quantidade relevante de matemática (o que não significa que o curso será sofrível ou enfadonho ou pouco prático).
- Gostaria da participação efetiva de todos, tanto nesse espaço, quanto fora da sala de aula, eventualmente. A "troca" é importante para o avanço do conhecimento humano. Nossas aulas serão muito longas, precisaremos de interação.
- Tentarei atender às dúvidas e aos questionamentos da melhor maneira possível. Caso surja um tema que demande maior reflexão de minha parte e que não seja de imediata resposta na aula, portanto, redarguí-lo-ei posteriormente.
- A curva de aprendizado do MEF é extensa e com certos dificultadores ... Ou seja, não é rapidamente que se aprende o fundamental do MEF e não se frustrem por eventuais obstáculos.
- Não esgotaremos o assunto! Como veremos é amplo o espectro de conceitos e aplicações do método.

Organização do curso

Conforme o programa/cronograma do curso:

- Aulas teóricas e práticas;
- Datas: 20/07, 03/08, 17/08 e 31/08;
- Presença compulsória (min. 75%);
- Necessidade de alguns recursos tecnológicos básicos (computador e calculadora, basicamente);
- Software de análise via MEF (SAP2000);
- Uma visão por dentro da "caixa-preta" (se conseguirmos...);
- Listas de exercícios (em sala/casa) e um projeto final (provavelmente);
- Bibliografia básica.

O que é o MEF?

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um **método numérico** para solução de **problemas de campo** (*numérico* = *aproximado*).

Um **problema de campo** é aquele no qual é necessária a determinação da **distribuição espacial** de uma ou mais **variáveis dependentes**. Exemplos: condução de calor, mecânica estrutural, eletromagnetismo, fluidos etc.

Matematicamente, um problema de campo é descrito por **equações diferenciais** (ou expressões integrais).

Problemas de campo envolvem geom. e c.d.c. complexas para os quais (via de regra) **não** é possível obter sol. analíticas fechadas (expressões/funções mat.).

A **solução analítica**, em geral, exige a resolução de equações diferenciais (ordinárias ou parciais), possível somente em alguns poucos casos mais simples.

O MEF, assim como outros métodos do gênero (G/XFEM, BEM, EFG, etc.), é ferramenta nesse processo $\rightarrow$ *Transforma eq. dif. em sist. de eq. algébricas*.

MEF $\rightarrow$ divide o domínio num sistema com subdomínios menores (**elementos**) interconectados em pontos comuns (**nós**); este processo de divisão em elementos/nós é chamado de **discretização**.

Cada elemento possui uma **distribuição assumida da var. de campo** e o arranjo particular de elementos é chamado de **malha**.

O sist. de eq. alg. é resolvido para **variáveis nodais**, que são quantias da variável de campo/estado e/ou, em alguns casos, de suas derivadas.

Os valores obtidos das variáveis nodais combinados com o campo assumido no interior dos subdomínios (elementos) determina completamente a distribuição espacial dos campos desejados.

Ou seja, a(s) variável(eis) é(são) aproximada(s) no domínio original **elemento-a-elemento**, por partes. → *Resolve-se p/ os nós e interpola no interior do elemento*.

Prob. estruturais: Determinar deslocamentos em cada nó e deformações/tensões no interior de cada elemento.

Visão geral

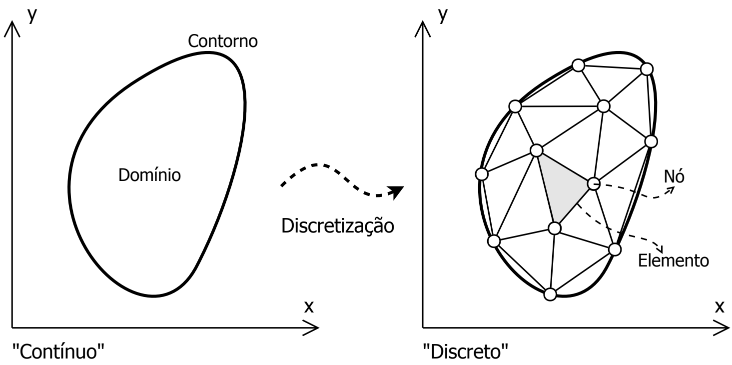
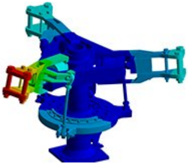
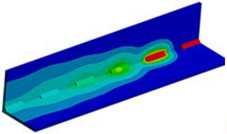
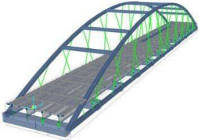
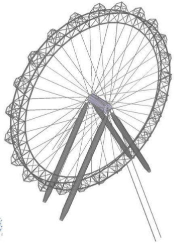
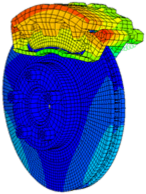
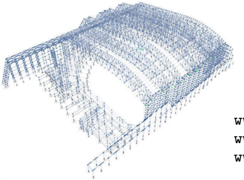


Fig.: Representação genérica de uma malha.

Exemplos

www.ansys.com;
www.3ds.com;
www.csiamerica.com

História

Não totalmente linear! Contribuições simultâneas e não necessariamente relacionadas ou interdependentes. *O MEF é algo recente na história da ciência*.

- **Fim Séc. XX:** alguns trab. secundários não explicitamente relacionados à teoria básica do MEF.
- **1940 – Hrennikoff:** redes de barras p/ solução de prob. sólidos (tensões).
- **1943 – Courant:** formulação variacional p/ obtenção de tensões com interpolação por partes através de subdomínios triangulares; sugere generalização e potencial de um novo método.
- **1954 – Argyris e Kelsey:** métodos matriciais p/ análise estrutural utilizando princípios de energia.
- **1956 – Turner et al.:** matrizes de rigidez de treliça, viga e EPT ($\triangle$ e $\square$) e **Método da Rigidez Direta**;

- **1960 – Clough:** batismo **Elementos Finitos** e formulação de EPT com $\triangle$ e $\square$.
- **1960–1965:** MEF adquire relevância; formalização teórica em bases variacionais; novas aplicações (Zienkiewicz e Cheung, 1965); novos elementos de placa, casca etc. (Melosh, 1963); análise 3D; **primeiros softwares começam a surgir**.
- **1970s:** computação gráfica/mouse $\rightarrow$ avanço dos sofwares; primeiras edições de livros (Zienkiewicz); **formulação paramétrica** (Irons, 1970); não linearidade.
- **Atualmente:** grande apelo computacional (testes não era possíveis na origem); variações do MEF tradicional e outros métodos; novas aplicações (não linear, multiescala, multifísico); paralelização; machine learning, etc.

A década de 1950 é marcada pelos avanços da indústria aeronáutica, período em que engenheiros da área desenvolveram muitas das técnicas iniciais do MEF (e que têm impacto até hoje).

O avanço do MEF é paralelo ao desenvolvimento da Ciência da Computação e das linguagens de programação, assim como auxiliou a impulsioná-las.

MEF + Estruturas é uma pequena parte do universo (uma pequena, mas considerável, parte). Há uma infinidade de aplicações e o MEF é algo muito mais amplo.

Alguns conceitos fundamentais

Para resolver um determinado problema físico utilizando-se do MEF é necessário compreender alguns pontos-chave:

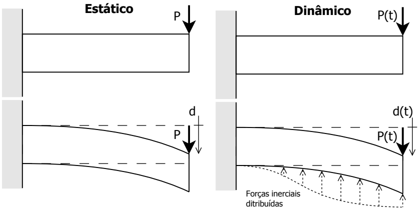
- Qual é o fenômeno físico mais importante envolvido na análise?
- O problema é dependente do tempo?
- Há alguma não linearidade?
- Qual a natureza do material?
- Quais os resultados necessários?
- Qual a acurácia buscada?

Destas perguntas surgem conceitos basilares importantes de serem previamente registrados, para que possamos nos situar:

Variação no tempo: estático $\times$ dinâmico

Estático

- Não depende do tempo;
- Carregamento não varia no tempo;
- Não há efeitos inerciais.



Dinâmico

- Depende do tempo;
- Carregamento varia no tempo;
- Aceleração é importante e há efeitos inercias.

* *Carga dinâmica* $\rightarrow$ magnitude, direção e/ou ponto de aplicação variam no tempo. Em decorrência disso, deslocamentos (e demais campos derivados) também variam no tempo.

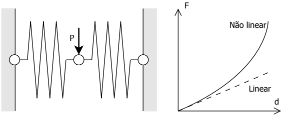
Não linearidade: linear $\times$ não linear

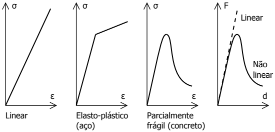
Linear $\rightarrow$ Pequenos deslocamentos e pequenas deformações.
Não linear $\rightarrow$ Geométrica, Física/Material, Condições de contorno. Exige *solvers* **incrementais-iterativos** para obtenção de **trajetórias de equilíbrio**.

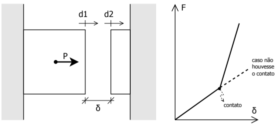
Geométrica: grandes desloc./rot., mas pequenas deformações. *Cabos, membranas, cascas (estruturas muito esbeltas)*.

Física/material: relação entre tensões e deformações. *Polímeros, aço (sob certas condições), concreto, solo etc.*

Condições de contorno: Condições de contorno/restrições se alteram com a evolução do estado de deformação. *Contato entre dois corpos.*





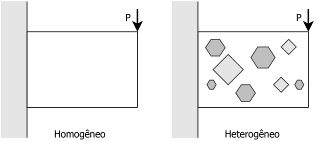


Observação: Em mecânica do contínuo, **deformação** é uma medida da variação da configuração geométrica de um corpo (e.g., *razão entre a variação do comprimento de uma barra e seu comprimento original*). Por sua vez, **tensão** é uma medida de solicitação num ponto, relacionada a forças internas do meio e energeticamente correspondente ao estado de deformações induzido num corpo.

Tensão-deformação: Tensões e deformações se relacionam por intermédio de um **modelo constitutivo**. Para nossas ambições aqui no curso e para o nível em que estamos, é suficiente entender que existe um **operador** (ou uma formulação compacta, com diversas constantes representativas de propriedades mecânicas do material) que estabelece a maneira de se obter um campo do outro. Um exemplo simples e clássico é a *Lei de Hooke* unidimensional que estabelece: $\sigma_x = E\varepsilon_x$.

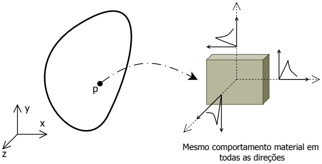
Homogeneidade: meio homogêneo $\times$ meio heterogêneo

Homogêneo: Mesmas propriedades materiais em todo o domínio.
Heterogêneo: Pontos materiais com propriedades físicas distintas ao longo do domínio.



Isotropia

Meio responde da mesma maneira em todas as direções ("relação tensão–deformação é a mesma em todas as direções").



Atenção! Exploraremos o universo de problemas **LINEARES**, **ESTÁTICOS**, **HOMOGÊNEOS** e **ISOTRÓPICOS**!

Notem: A restrição ao cenário acima é considerável, mas essencial para o início dos estudos e já fornecerá dificuldades suficientes. Além disso, é justo dizer que uma grande parte dos problemas corriqueiros da Engenharia de Estruturas se enquadra potencialmente nesse microcosmo.

O que é uma simulação numérica?

Em nosso contexto, simulação numérica é uma metodologia estratificada para reproduzir virtualmente um determinado comportamento real através de ferramentas algorítmicas, baseadas em formulações matemáticas (usar um computador para predizer o comportamento de uma estrutura sob certas condições).

Fundamentalmente:

Entendimento do **problema físico** $\rightarrow$ construção de um modelo.

Modelo matemático $\rightarrow$ conjunto de equações diferenciais e CDCs (*Idealização baseada num conjunto de hipóteses*).

MEF é simulação, não é realidade! MEF $\rightarrow$ **Modelo discreto** (*também erguido sob conjuntos de hipóteses*).

Como MEF é relacionado a uma **discretização** de um modelo matemático, que por sua vez é uma **idealização** de um fenômeno físico, há **erros** inerentes no processo, dentre eles, temos:

- **Erro de modelagem:** relacionado às hipóteses básicas na formulação das equações;
- **Erro de discretização:** relacionado ao número de elementos;
- **Erro numérico:** relacionado à maneira com que o PC representa números (núm. com precisão finita; ponto flutuante) e faz cálculos; pode ser desmembrado em outros tipos de erro.

Características

Pré-processamento

Construção do modelo geométrico, definição da discretização, definição dos carregamentos e restrições, definição das prop. mecânicas/físicas do material, definição das relações entre grandezas etc.

Qualidade da análise e dos resultados depende fortemente dessa etapa.

Análise

Nessa etapa os cálculos são efetuados (construção de matrizes, vetores, resolução de sistemas etc.).

"Caixa-preta" p/ o utilizador. **Contudo, é aqui que mora o MEF!**. É muito importante saber (ainda que qualitativamente) quais as operações que são realizadas pelo programa.

Pós-processamento

Apresentação dos dados de saída. Ex.: arquivos, respostas gráficas, tabelas, imagens etc.

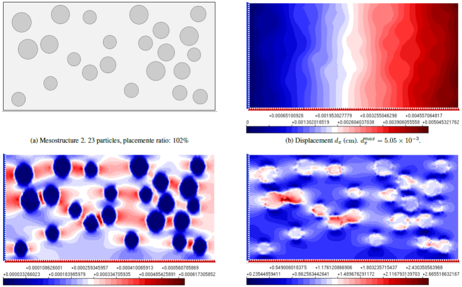
Interpretação dos resultados.

Softwares/pacotes que implementam o MEF

- ANSYS (`www.ansys.com`);
- ABAQUS (`www.3ds.com`);
- SAP2000 (`www.csiamerica.com`);
- LS-DYNA (`www.lstc.com`);
- CALCULIX (`www.calculix.de`);
- OOFEM (`www.oofem.org`);
- CODE-ASTER (`www.code-aster.org`);
- COMSOL (`www.comsol.com`);
- FENICS (`www.fenicsproject.org`);
- INSANE (`www.insane.dees.ufmg.br`)

Caso tenham interesse, no link há um número considerável de outros pacotes:

`https://tinyurl.com/yc82mk87`



(a) Mesostructure 2. 23 particles, placemente ratio: 102%

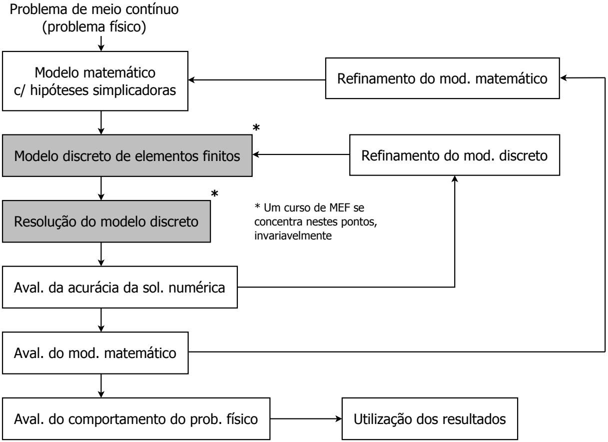
(b) Displacement d_x (cm). $d_x^{max} = 5.05 \times 10^{-3}$.

(c) Strain ϵ_{xx} (cm/cm). $\epsilon_{xx}^{max} = 6.17 \times 10^{-4}$; $\epsilon_{xx}^{min} = 3.32 \times 10^{-5}$

(d) Stress σ_{xx} (kN/cm^2). $\sigma_{xx}^{max} = 2.66$; $\sigma_{xx}^{min} = 0.235$.

Fig.: Exemplo de simulação de heterogeneidade – INSANE-DEES-UFMG

Etapas da modelagem de um problema

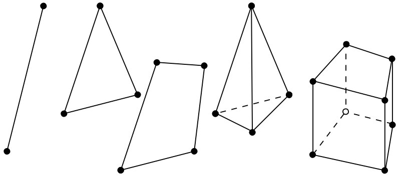


Etapas do MEF

O desenvolvimento de um modelo do MEF, incluindo-se os pormenores físico-matemáticos subjacentes (e imprescindíveis!), segue as seguintes etapas:

E1) Definição da discretização

Seleção do número de elementos/nós e do tipo de elemento.



E2) Definição de uma aproximação para cada elemento

Seleção de uma **função de deslocamentos** p/ cada elemento. A função é definida dentro de cada subdomínio usando-se valores nodais (**interpolação**). *Interpolar* $\rightarrow$ *dividir uma função contínua, que satisfaz condições prescritas, em um número finitos de pontos*.

Em geral as funções utilizadas são **polinômios**, que obedecem a um conjunto de características necessárias.

O campo de deslocamentos – uma grandeza contínua (via de regra) – do corpo/estrutura é aproximada por um modelo discreto composto de um conjunto de **"funções retalho"** definidas no domínio de cada elemento.

Relaciona-se com funções especiais chamadas **funções de forma** (que serão estudadas em maior detalhe posteriormente).

E3) Definição das relações deformações-deslocamentos e tensões-deformações

Seleção do operador que calcula deformações a partir de deslocamentos e da lei que determina tensões a partir de deformações.

Relembrar conceitos anteriores; Linearidade $\times$ *Não linearidade*. *Pequenos deslocamentos e pequenas deformações*.

$$\varepsilon = \nabla u \qquad \sigma = \mathbb{E}\ \varepsilon$$

E4) Definição das equações de equilíbrio nos elementos (matrizes de rigidez de cada elemento)

Equilíbrio nodal no domínio do elemento é dado pela relação entre forças e deslocamentos, representada pela matriz de rigidez.

Há diversas técnicas para derivar essa relação, utilizaremos duas, a saber:

- **Método de Equilíbrio de Forças:** direto, mas restrito a casos simples; iniciaremos por ele.
- **Princípio dos Trabalhos Virtuais:** princípio variacional mais geral aplicável a praticamente todos os casos; generalizamos o MEF oportunamente através do PTV.

Existem outras estratégias, mas não iremos abordá-las

$$\underline{\hat{f}} = \underline{\hat{k}}\ \underline{\hat{d}}, \text{em que } \underline{\hat{k}} \text{ é o liame buscado}$$

E5) Definição das equações de equilíbrio do modelo (montagem da rigidez global)

Através do **Método da Rigidez Direta**, as equações de equilíbrio nodal individuais de cada elemento são "ensambladas" de maneira a se obter as equações globais de equilíbrio.

Implicitamente, essa montagem possui o conceito de continuidade/ conformidade, que requer que a estrutura se mantenha coesa.

$$\underline{\hat{F}} = \underline{\hat{K}}\ \underline{\hat{d}}, \text{em que } \underline{\hat{K}} = \biguplus \underline{\hat{k}} \text{ é a matriz de rigidez da estrutura}$$

$\underline{\hat{K}}$ possui caraterísticas especiais que serão oportunamente tratadas a posteriori.

E6) Imposição das condições de contorno e solução do sistema p/ os deslocamentos

Sistema de equações algébricas:

$$\underline{\hat{F}} = \underline{\hat{K}}\ \underline{\hat{d}}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{array} \right\}$$

- $\underline{\hat{F}}$ possui valores conhecidos e desconhecidos;
- $\underline{\hat{d}}$ possui valores conhecidos e desconhecidos;
- Em $\underline{\hat{K}}$, cada uma das entradas K_{ij} depende da natureza do elemento (da função de forma, do tipo de material...)

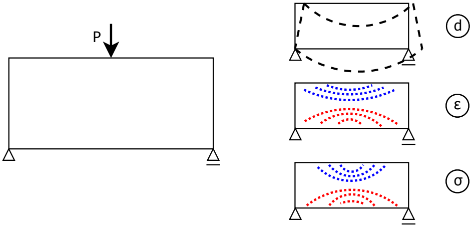
E7) Determinação das grandezas internas em cada elemento

Cálculo de deformações e tensões (ou forças/momentos), que são função dos deslocamentos.

$$\varepsilon = \nabla u \qquad \sigma = \mathbb{E}\,\varepsilon$$

E8) Interpretação dos resultados

Uso de ferramentas de pós-processamento para verificação dos resultados.



Álgebra linear

Uma matriz é uma coleção de números arranjados em linhas e colunas.

Em geral, representa-se uma matriz por letras romanas maiúsculas em negrito ($\mathbf{A}$), letras romanas maiúsculas grifadas ($\underline{A}$) ou letras entre colchetes/chaves ($[A]$, $\{a\}$).

Uma matriz de ordem $m \times n$ é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Se $m \neq n \rightarrow$ matriz RETANGULAR;
- Se $m = n \rightarrow$ matriz QUADRADA;
- Se $m > 1,\ n = 1 \rightarrow$ matriz COLUNA (**Vetor**);
- Se $m = 1,\ n < 1 \rightarrow$ matriz LINHA (**Vetor**);

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix};\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix};\ \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Operações e propriedades

- **Multiplicação por escalar ($\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A}$)**

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};\ 2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

- **Adição de matrizes ($\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$)**

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Propriedades:
$\mathbf{A}_{m\times n}$ e $\mathbf{B}_{m\times n}$;
$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;
$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

• Multiplicação por matriz ($\mathbf{C} = \mathbf{AB}$)
"Linha vezes coluna"

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$$

Propriedades:
$\mathbf{A}_{m\times n}$ e $\mathbf{B}_{n\times l}$;
$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$;
$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$
$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA}$
$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

• Transposição ($\mathbf{A}^\top$)
"Linha vira coluna"

$$a_{ij} = a_{ji}^\top$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix};\ \mathbf{A}^\top \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Propriedades:
$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}$;

• **Matriz identidade ($\mathbf{I}$)**

Uma matriz identidade é tal que

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

"Funciona como o número 1"

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \cdots$$

• **Determinante ($\det(\mathbf{A})$ ou $|\mathbf{A}|$)**

Função matricial que associa um valor numérico (escalar) único a uma matriz quadrada.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{M}|$$

$\mathbf{C} \rightarrow$ matriz cofatora; $\mathbf{M} \rightarrow$ primeiro menor ($\mathbf{A}$ removendo-se linha i e coluna j)

• Inversão

Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ é invertível se existe uma matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

A matriz $\mathbf{A}^{-1}$ é chamada de inversa de $\mathbf{A}$ e calculada da seguinte forma:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{C}^{\top}$$

em que $\mathbf{C}^{\top}$ é a transposta da cofatora, chamada de matriz adjunda de $\mathbf{A}$.

Importante: O conceito de inversa é importante na resolução de sistemas e há outras alternativas para cálculo de inversa. Em geral não se inverte matriz computacionalmente, pois é uma operação cara!

- **Simetria**

Se uma matriz quadrada é igual a sua transposta, então ela a matriz é simétrica.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$$

- **Esparsidade**

Uma matriz é esparsa se possui uma grande quantidade de zeros.

Veremos que essa característica é comum no MEF.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- **Singularidade**

Uma matriz é singular se não possui inversa, ou seja, se seu determinante é igual a zero.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = 0$, $\nexists\ \mathbf{A}^{-1}$

Veremos que matrizes de rigidez são originalmente singulares.

Sistemas de equações

$$\left.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}\right\rangle \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

em que $x_j \rightarrow$ incógnitas; $a_{ij} \rightarrow$ coeficientes; $b_i \rightarrow$ termos independentes.

Info:
- Se $b_i = 0 \rightarrow$ sist. homogêneo; Se $b_i \neq 0 \rightarrow$ não homogêneo;
- $\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow$ sol. trivial; $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \rightarrow$ sol. não trivial;
- **Unicidade da solução** $\rightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$
- Diversas técnicas de solução de sistemas: **Decomposição LU**, **Regra de Cramer**, **Gauss-Jordan** etc. *Não irei me ater às técnicas de resolução, pelo menos por enquanto. Calculadoras/softwares fazem a resolução c/ relativa simplicidade.*

Começando...

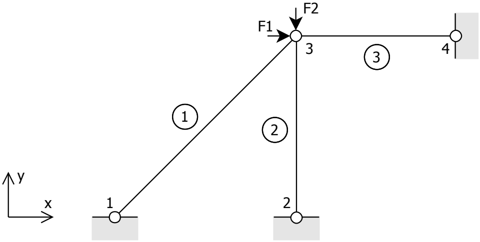
A partir de agora iniciaremos com a introdução ao MEF propriamente dito. Nosso enfoque, conforme já mencionado, será a análise **estática** de estruturas **homogêneas** e **isotrópicas** em regime **linear**.

De início, a **notação** básica a ser utilizada será apresentada, seguida de uma **motivação** inicial para compor os fundamentos do método e de uma estratégia basilar do MEF (**rigidez direta**).

Fecharemos a etapa teórica de hoje com a formulação de **elementos unidimensionais** submetidos a **esforços axiais**.

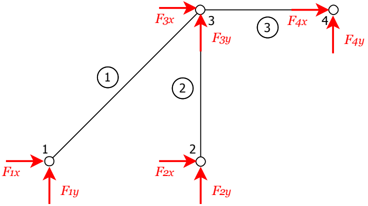
Notação

Identificam-se a seguir vetores de forças e deslocamentos nodais nos sistemas de coordenadas **global** (x, y) e **local** $(\hat{x}, \hat{y})$. Cada componente, em seu respectivo sistema de coordenadas, possuirá um identificador do **nó** a que se refere, da **direção** em que atua e o **elemento** a que pertença (que pode eventualmente ser omitido, quando da ausência de iminente confusão, por simplicidade de notação).
Considere a seguinte treliça, cujo sistema de coordenadas globais está indicado:



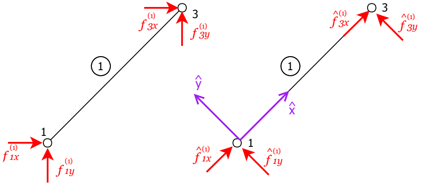
Forças

Forças nos nós do modelo



$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{c} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{array} \right\}$$

Forças nos dós das barras

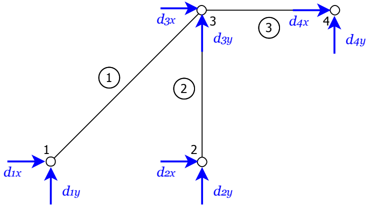


$$\mathbf{f}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{c} f^{(1)}_{1x} \\ f^{(1)}_{1y} \\ f^{(1)}_{3x} \\ f^{(1)}_{3y} \end{array} \right\} ; \quad \hat{\mathbf{f}}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{c} \hat{f}^{(1)}_{1x} \\ \hat{f}^{(1)}_{1y} \\ \hat{f}^{(1)}_{3x} \\ \hat{f}^{(1)}_{3y} \end{array} \right\}$$

Descrição do equilíbrio; Descrição dos esforços

Deslocamentos

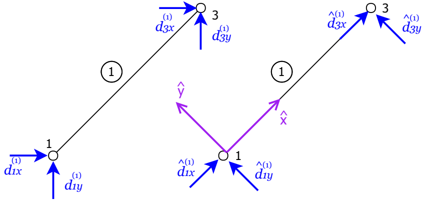
Desloc. nos nós do modelo



$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{Bmatrix}_{(n.nos \times n.g.l.) \times 1}$$

Tem relação com o vetor de forças $\mathbf{F}$

Desloc. nos dós das barras



$$\mathbf{d}^{(1)} = \begin{Bmatrix} d_{1x}^{(1)} \\ d_{1y}^{(1)} \\ d_{3x}^{(1)} \\ d_{3y}^{(1)} \end{Bmatrix} ; \; \hat{\mathbf{d}}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x}^{(1)} \\ \hat{d}_{1y}^{(1)} \\ \hat{d}_{3x}^{(1)} \\ \hat{d}_{3y}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

Devem possuir **correspondência** com os vetores de força (*mesma ordem*)

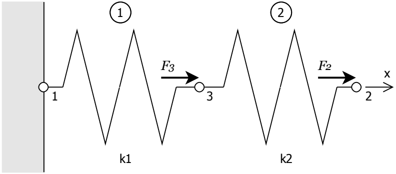
$\boxed{\mathbf{d}^{(1)} \equiv \mathbf{d}}$ **compatibilidade**

Motivação e preliminares

Consideremos inicialmente um **sistema de molas lineares**. Cada mola é um **elemento unidimensional** composto por dois pontos extremos (**dois nós**) e que não resiste a esforços de cisalhamento, não desloca-se transversalmente, e desse modo, suporta **somente esforços axiais**.

Os dois nós de extremidade deslocam-se ao longo do eixo central. Cada um desses deslocamentos é chamado de **grau de liberdade**. Portanto, a mola possui **dois g.l.**

Adicionalmente, a mola tem uma **constante de mola** que representa a sua Rigidez. *Lei de Hooke, 1660 – força produzida por um corpo elástico é proporcional à sua deformação* ($f \propto \delta \Rightarrow f = k\delta$)

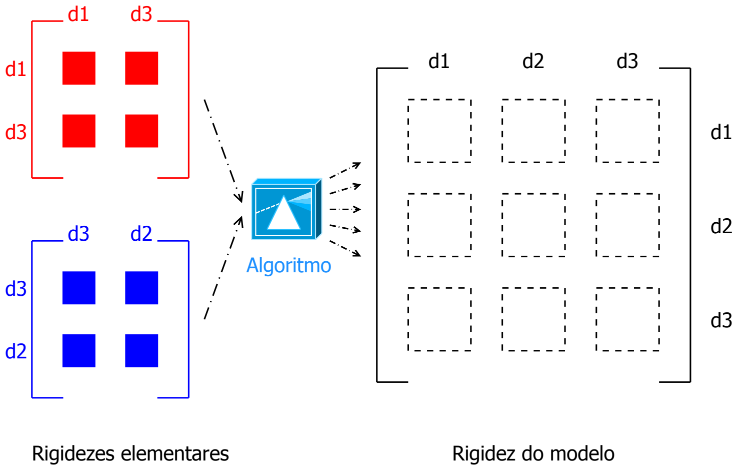


Seguindo as etapas do MEF anteriormente introduzidas, formularemos o MEF para o cenário pretexto apresentado. Aqui veremos como o **Método da Rigidez Direta** (componente basilar do MEF) funciona.

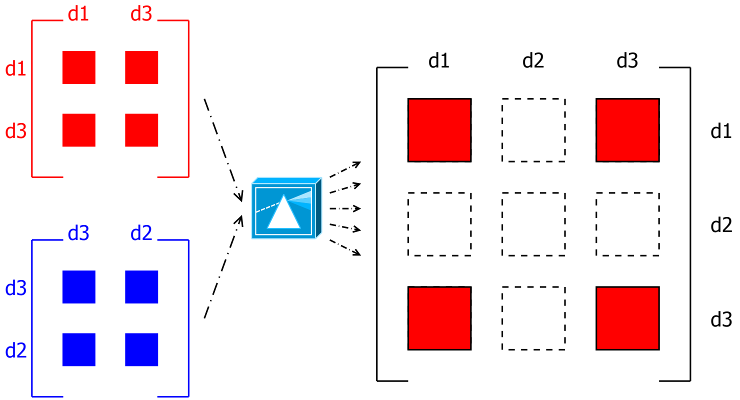
1. Definição da discretização/seleção do elemento;
2. Definição da aproximação para os deslocamentos;
3. Definição das relações deform-desloc e tensao-deform;
4. Equilíbrio de forças no elemento;
5. Equilíbrio de forças do modelo;
6. Imposição de CDC e cálculo de deslocamentos.

Pro quadro...

Método da Rigidez Direta: síntese



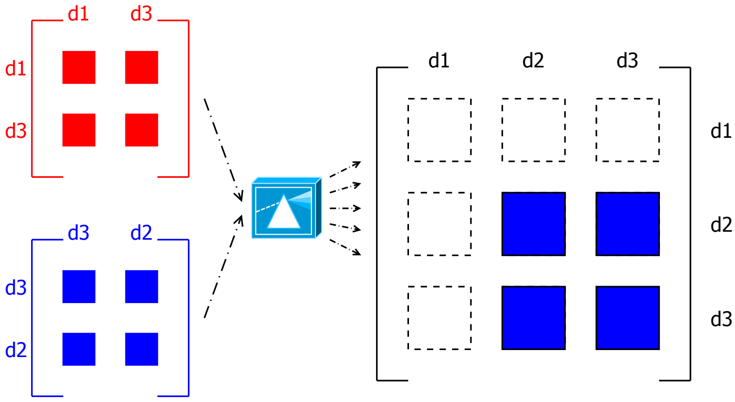
Método da Rigidez Direta: síntese



Rigidezes elementares

Rigidez do modelo

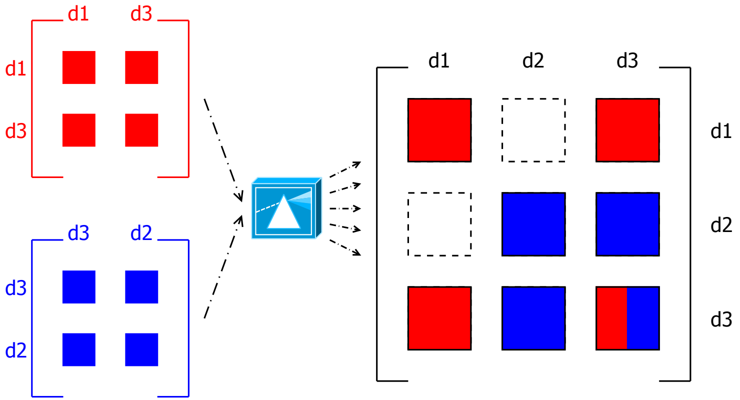
Método da Rigidez Direta: síntese



Rigidezes elementares

Rigidez do modelo

Método da Rigidez Direta: síntese



Rigidezes elementares

Rigidez do modelo

Sistema de equações do MEF: síntese

Sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K_{ii}} & \mathbf{K_{ip}} \\ \mathbf{K_{pi}} & \mathbf{K_{pp}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d_i} \\ \mathbf{d_p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F_p} \\ \mathbf{F_i} \end{Bmatrix}$$

Deslocamentos incógnitos:

$$\mathbf{F_p} = \mathbf{K_{ip}} \mathbf{d_p} + \mathbf{K_{ii}} \mathbf{d_i}$$
$$\mathbf{d_i} = \mathbf{K_{ii}^{-1}} \left(\mathbf{F_p} - \mathbf{K_{ip}} \mathbf{d_p} \right)$$

Forças incógnitas (reações):

$$\mathbf{F_i} = \mathbf{K_{pi}} \mathbf{d_i} + \mathbf{K_{pp}} \mathbf{d_p}$$
$$\mathbf{F_i} = \mathbf{K_{pi}} \mathbf{K_{ii}^{-1}} \left(\mathbf{F_p} - \mathbf{K_{ip}} \mathbf{d_p} \right) + \mathbf{K_{pp}} \mathbf{d_p}$$